CONCOURS 1980

OPTIONS M et P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 2 heures

PARTIE I

On considère l'équation différentielle :

(E) $$2x(1-x)y'' + (3-5x)y' - y = 0$$

où x est une variable réelle.

1° Montrer qu'il existe une série entière et une seule

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

de rayon de convergence R non nul, dont la somme soit solution de (E) pour $|x| < R$ et qui prenne la valeur $y = 1$ en $x = 0$. Pour cela on cherchera une relation de récurrence entre a_n et a_{n-1}. Que vaut R ?

2° Intégrer (E) en remarquant que son premier membre est la dérivée par rapport à x d'une fonction de x, y, y'.

PARTIE II

On considère la fonction g définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \in]0, +\infty[, \; g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \ln \left| \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right| & (\ln = \text{logarithme népérien}) \\ \text{pour } x \in]-\infty, 0[, \; g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x}} \operatorname{Arc\,tg} \sqrt{-x} & (\text{Arc tg} = \text{arc tangente}) \end{cases}$$

1° Faire l'étude complète et le graphique de cette fonction dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prendra $\|\vec{i}\| = 2$ cm $= \|\vec{j}\|$.

2° *a.* L'intégrale $\int_0^1 g(x)\,dx$ existe-t-elle ? Si oui, quelle est sa valeur ?

b. L'intégrale $\int_2^{+\infty} g(x)\,dx$ existe-t-elle ? Si oui, quelle est sa valeur ?

PARTIE III

Dans cette partie, on considère toujours la fonction g définie dans la partie II et on veut calculer une valeur approchée à 10^{-4} près de x_s tel que : $x_s < 0$ et $g(x_s) = \frac{1}{2}$ par la méthode de Müller, méthode itérative utilisant à chaque itération une parabole à axe parallèle à l'axe $x'Ox$ (de vecteur directeur $\vec{i}$) comme courbe d'interpolation.

Principe

Soit f une fonction continue entre a et b (avec soit $a < b$, soit $b < a$), strictement croissante sur cet intervalle, telle que $f(a)\,f(b) < 0$.

Alors il existe un et un seul x_s entre a et b tel que $f(x_s) = 0$.

Les valeurs a et b constituent un encadrement de x_s.

On pose :

$$m = \frac{a+b}{2}, \quad \mu = f(m), \quad \alpha = f(a), \quad \beta = f(b) ;$$

si $\mu = 0$, $x_s = m$, sinon on considère dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points A (a, α), B (b, β), M (m, μ).

Par une permutation éventuelle des points A et B, on se place dans le cas de la disposition suivante :

{ A et M situés de part et d'autre de l'axe $x'Ox$;
{ M et B situés d'un même côté de $x'Ox$;

Alors x_s est entre a et m.

Soit (P) la parabole passant par A, B, M d'axe parallèle à $x'Ox$.

Soit r l'abscisse de son point d'intersection avec $x'Ox$.

Si r est entre a et m, la parabole est dite « bonne », on calcule $f(r)$ et suivant le signe de $f(r)$ on obtient un nouvel encadrement de x_s : x_s est soit entre a et r, soit entre r et m.

Sinon on se contente de l'encadrement de x_s constitué par a et m.

On réitère le procédé jusqu'à ce que l'on obtienne la précision désirée, la largeur de l'intervalle d'encadrement diminuant au moins de moitié à chaque étape.

Questions

1° Établir l'équation de la parabole (P) en fonction de a, b, m, α, β, μ;

2° Calculer r en fonction de a, b, α, β, μ. Écrire r sous la forme :

$$r = a + \frac{b-a}{2}\,\frac{\alpha t}{(\alpha-\beta)(\beta-\mu)(\mu-\alpha)}$$

où t est une expression en α, β, μ à déterminer.

3° Montrer que la parabole (P) est « bonne » si et seulement si t est strictement positif. Quel est l'intérêt pratique de ce test sur le signe de t en cours de calcul?

4° *Application :* Calculer par la méthode de Müller une valeur approchée à 10^{-4} près de x_s tel que $x_s < 0$ et $g(x_s) = \frac{1}{2}$ en partant de l'intervalle $[E(x_s), E(x_s)+1]$ où $E(x_s)$ désigne la partie entière de x_s, et en appliquant la méthode à $f(x) = g(x) - \frac{1}{2}$.

On disposera ainsi les calculs, en respectant toutes les notations de l'énoncé :

a			
b			
m			
α			
β			
μ			
t			
r			
$f(r)$			

et on énoncera clairement la réponse.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail